Titlu: Numere complexe
Subiect: Subiectul I, exercitiul 1
Clasa: a X-a
Profil: M_mate-info, M_st-nat, M_tehnologic

- ☔ **M_mate-info** pentru filiera teoretica, profilul real, *specializarea matematica-informatica* si pentru filiera vocationala, profilul militar, *specializarea matematica-informatica*
- ⛅ **M_st-nat** pentru filiera teoretica, profilul real, *specializarea stiinte ale naturii*
- 🌞 **M_tehnologic** pentru filiera tehnologica: profilul servicii, *toate calificarile profesionale*; profilul resurse naturale si protectia mediului, *toate calificarile profesionale*; profilul tehnic, *toate calificările profesionale*

Frecventa la BAC ☔ - crescuta ⛅ - medie 🌞 - redusa

Exercitii propuse

1. Aratati ca:
   a. $(2 + 3i)^2 = i(5i + 12)$
   b. $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$ este real
   c. $\frac{1+i}{(1-i)^2} + \frac{1-i}{(1+i)^2}$ este intreg negativ
   d. $1 + i + i^2 + ... + i^{10} = i$
   e. $z(2 + 3i) + \bar{z}(2 - 3i)$ este real pentru orice $z \in C$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numarului complex z
   f. $z^2 - z - i = -1$ pentru $z = 1 + i$
2. Determinati partea reala si partea imaginara a numarului complex:
   a. $z = 2(3 + 2i)$
   b. $z = (4 + 3i)(4 - 3i) + 2$
   c. $z = \frac{2+i}{4}$
   d. $z = \frac{2+i}{4+i}$
   e. $z = 1 + 2i + 3i^2$
3. Aflati valorile reale ale lui a si b astfel incat:
   a. $\frac{1+i}{1-i} = a + ib$
   b. $\frac{2+i}{i} = 2a + ib$
   c. $(2 + 3i)(a - 1) + (2 - 3i)(a - b + 1) = 8 - 3i$

4. Determinati numarul complex z pentru care:
   a. $z = 4\bar{z}$
   b. $2\bar{z} - z = 1 - 3i$
5. Calculati modulul numarului complex:
   a. $z = (4 + 3i)^2$
   b. $z = (1 + i\sqrt{3})^2 - (1 - i\sqrt{3})^2$
   c. $z = \frac{2+i}{1-i}$

Raspunsuri si indicatii:

Pentru intrebari sau nelamuriri va invit sa folositi [grupul de Facebook](). Totodata va incurajez sa participati la discutiile publice de acolo si sa ajutati atunci cand o puteti face.

> *Pentru exercitiile in care cerinta ne cere **sa aratam, sa justificam sau sa demonstram** ca are loc o egalitate, aducem la cea mai simpla forma fiecare dintre cei doi membrii - cel din stanga si cel din dreapta - iar in concluzia exercitiului mentionam egalitatea.*

1. a. $membrul\ stang\ (2+3i)^2 = -5+12i$
   $membrul\ drept\ i(5i+12) = -5+12i$
   deci, $(2+3i)^2 = i(5i+12)$
   b. $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2 = -1 \in R$
   c. $\frac{1+i}{(1-i)^2} + \frac{1-i}{(1+i)^2} = -1 \in Z_-$
   d. $se\ observa\ ca\ i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$
   $atunci,\ 1+i+i^2+...+i^{10} = i$
   alternativ, suma poate fi privita ca S_{11} a unei progresii geometrice cu ratia $q = i$
   cum $S_{11} = b_1 \cdot \frac{q^{11}-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{i^{11}-1}{i-1}$ si $i^{11} = i^{4\cdot 2+3} = -i$ avem, $S_{11} = i$
   e. fie $z = a+bi$, cu $a, b \in R$ atunci $\overline{z} = a - bi$ si
   $z(2+3i) + \overline{z}(2-3i) = (a+bi)(2+3i) + (a-bi)(2-3i) = 4a - 6b$
   cum $a, b \in R$ avem $4a,\ 6b \in R$ iar diferenta a doua numere reala este intotdeauna un numar real
   deci, $z(2+3i) + \overline{z}(2-3i) \in R$, pentru orice $z \in C$
   f. daca $z = 1+i$ atunci $z^2 - z - i = (1+i)^2 - (1+i) - i = -1$

2. a. $Re(z) = 6\ \ Im(z) = 4$
   b. $Re(z) = 27\ \ Im(z) = 0$
   c. $Re(z) = \frac{1}{2}\ \ Im(z) = \frac{1}{4}$
   d. $Re(z) = \frac{9}{17}\ \ Im(z) = \frac{2}{17}$
   e. $Re(z) = -2\ \ Im(z) = 2$
3. a. $a = 0,\ b = 1$
   b. $a = \frac{1}{2},\ b = -2$
   c. $a = \frac{5}{2},\ b = 1$
4. a. fie $z = a+bi$, cu $a, b \in R$ atunci $\overline{z} = a - bi$ si

$z = 4\overline{z} \Leftrightarrow a + bi = 4(a - bi) \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$ deci, $z = 0$

b. fie $z = a + bi,$ cu $a, b \in R$ atunci $\overline{z} = a - bi$ si

$2\overline{z} - z = 1 - 3i \Leftrightarrow 2(a - bi) - (a + bi) = 1 - 3i \Leftrightarrow a = 1,\ b = 1$

deci, $z = 1 + i$

5. a. $|z| = 25$

b. $|z| = 4\sqrt{3}$

c. $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$